

---

## Mécanique analytique, Série 11

---

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch  
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch  
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch  
 filippo.ferrari@epfl.ch  
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch  
 mathias.findrihan@epfl.ch  
 remi.thomas@epfl.ch

Dans cette série d'exercices, vous allez appliquer les notions de variables action-angle, portrait de phase, et système intégrable, que nous avons vues en cours.

### Exercice 1 : Deux oscillateurs anharmoniques couplés (?)

Déterminer si le système décrit par les coordonnées canoniques  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  et régi par le Hamiltonien ci-dessous, est intégrable

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{3}(q_1 - q_2)[(q_1 + q_2)^2 - q_1 q_2].$$

### Exercice 2 : Billard plan rectangulaire

On se propose de déterminer les trajectoires périodiques d'un billard plan rectangulaire par la méthode des variables action-angle. Considérer un billard plan délimité par  $0 \leq x \leq a$  et  $0 \leq y \leq b$ , et étudier le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  qui se déplace sans frottement à l'intérieur du billard subissant une réflexion élastique lorsqu'il rencontre une paroi. Ces réflexions sont décrites par :

$$(p_x, p_y) \longrightarrow (-p_x, p_y) \quad \text{sur les parois } x = 0 \text{ et } x = a$$

$$(p_x, p_y) \longrightarrow (p_x, -p_y) \quad \text{sur les parois } y = 0 \text{ et } y = b$$

- a) Tracer les portraits de phase dans les plans  $(x, p_x)$  et  $(y, p_y)$ .
- b) Résoudre l'équation caractéristique de Hamilton–Jacobi pour le mouvement de la particule entre deux collisions sur les parois par la méthode de séparation des variables.
- c) Déterminer les variables actions  $I_x$  et  $I_y$  associées aux mouvements suivant  $x$  et  $y$ .
- d) Établir l'expression pour l'énergie  $\alpha_1$  en fonction de  $I_x$  et  $I_y$ .
- e) En déduire les fréquences du mouvement suivant  $x$  et  $y$ . Sous quelles conditions le mouvement est-il globalement périodique? Donner deux exemples de trajectoires périodiques pour un billard carré.

### Exercice 3 : Variable action

Une particule de masse  $m$  se déplace dans un potentiel unidimensionnel suivant, avec  $k_-, k_+ > 0$  :

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_- \left(x + \frac{a}{2}\right)^2, & 2x < -a, \\ 0, & -a \leq 2x \leq a, \\ \frac{1}{2}k_+ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2, & 2x > a. \end{cases}$$

- a) Esquisser précisément le potentiel et le portrait de phase.
- b) En partant de l'équation caractéristique de Hamilton–Jacobi, calculer la variable action.
- c) Pour  $a = 0$ , déterminer la fréquence des oscillations en fonction de l'énergie. Montrer que la fréquence est la moyenne harmonique  $2\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$  des fréquences de deux oscillateurs harmoniques simples.
- d) Toujours pour  $a = 0$ , discuter du comportement de la fréquence dans les cas limites  $k_- \rightarrow 0$  et  $k_- \rightarrow \infty$ .